15436

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1994 අගෝස්තු
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1994

ව්‍යවහාරික ගණිතය I
Applied Mathematics I

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

1. O, P, Q යනු ඒකරේඛීය නොවන ලක්ෂ්‍ය තුනකි. R ලක්ෂ්‍යය, OPQ තලයේ පිහිටා ඇත්තේ

$$\overrightarrow{OR} = \alpha\left(\frac{\overrightarrow{OP}}{OP} + \frac{\overrightarrow{OQ}}{OQ}\right)$$

වන පරිදි ය. මෙහි α යනු අදිශයකි. POQ කෝණය OR හෙන් සමච්ඡේදනය වන බව පෙන්වන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයේ $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{CA} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$ වේ. ABC ත්‍රිකෝණයේ B කෝණයේත් C කෝණයේත් අභ්‍යන්තර සමච්ඡේදක L හි දී හමු වෙයි. $\overrightarrow{BL} = \lambda\left(\frac{\mathbf{a}}{a} - \frac{\mathbf{c}}{c}\right)$ බව පෙන්වන්න. මෙහි λ යනු අදිශයකි, $a = |\mathbf{a}|$, $b = |\mathbf{b}|$ හා $c = |\mathbf{c}|$. එවැනි ම ආකාරයකින් $\overrightarrow{CL}$ ප්‍රකාශ කරන්න. $\overrightarrow{AL}$ සඳහා ස්වායත්ත ප්‍රකාශන දෙකක් ලියා දක්වා

$$\lambda = \frac{ac}{a+b+c} \quad \text{බව ද} \quad \overrightarrow{AL} = \frac{b\mathbf{c} - c\mathbf{b}}{a+b+c} \quad \text{බව ද පෙන්වන්න.}$$

ඒ හයින්, ඕනෑ ම ත්‍රිකෝණයක අභ්‍යන්තර සමච්ඡේදක තුන ඒකලක්ෂ්‍ය බව පෙන්වන්න.

2. නිශ්-ශුන්‍ය දෛශික දෙකක අදිශ ගුණිතය අර්ථ දක්වන්න.

$\mathbf{i} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{j} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{k} = \overrightarrow{OC}$ යනු අන්‍යොන්‍ය වශයෙන් ලම්බ ඒකක දෛශික තුනකි.

α, β, γ යනු $\mathbf{r} = l\,\mathbf{i} + m\,\mathbf{j} + n\,\mathbf{k}$ දෛශිකය පිළිවෙළින් $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ දෛශික සමග සාදන කෝණයි.

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$$

බව පෙන්වන්න.

තව ද $\overrightarrow{OP} = l\,(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$ දෛශිකය, $\overrightarrow{OA}$ වත් $\overrightarrow{OB}$ වත් $\overrightarrow{OC}$ වත් සම සේ ආනත බවත් ABC තලයට ලම්බ බවත් පෙන්වන්න. පහත සඳහන් එක් එක් අවස්ථාවේ දී l හි අගය නිර්ණය කරන්න.

(i) ABC තලයේ P පිහිටයි.

(ii) $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$ අන්‍යොන්‍ය වශයෙන් ලම්බයි.

(iii) P ලක්ෂ්‍යය, $OABC$ චතුස්තලයේ ශීර්ෂ හතරේ සිට සමදුරින් වෙයි.

3. $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ නිශ්-ශූන්‍ය දෛශික දෙකේ $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ දෛශික ගුණිතය අර්ථ දක්වන්න.

(i) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ හා $\mathbf{c}$ යනු නිශ්-ශූන්‍ය වූ ද සමාන්තර නොවූ ද දෛශික තුනකි.
$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ නම් $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$ බව පෙන්වන්න.
විලෝම වශයෙන්, $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$ නම්
$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ බව පෙන්වන්න.
ඕනෑ ම ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සයින් සූත්‍ර අපෝහනය කරන්න.

(ii) L, M, N යන ලක්ෂ්‍ය තුන කෙසේ ද යත් $\overrightarrow{OL} = \mathbf{l}$, $\overrightarrow{OM} = \mathbf{m}$ හා $\overrightarrow{ON} = \mathbf{n}$ වන පරිදි වෙයි.
මෙහි O යනු මූල ලක්ෂ්‍යය යි.
$\lambda + \mu + \nu = 0$ ද $\lambda \mathbf{l} + \mu \mathbf{m} + \nu \mathbf{n} = 0$ වන පරිදි වූ λ, μ හා ν යන නිශ්ශූන්‍ය සංඛ්‍යා පවතී නම් $\mathbf{m} \times \mathbf{n} + \mathbf{n} \times \mathbf{l} + \mathbf{l} \times \mathbf{m} = 0$ බව පෙන්වන්න.
$\mathbf{m} \times \mathbf{n} + \mathbf{n} \times \mathbf{l} + \mathbf{l} \times \mathbf{m} = 0$ බව දී ඇති නම් L, M, N ලක්ෂ්‍ය ඒකරේඛීය වන බව පෙන්වන්න.

4. දිග $2a$ ද බර W ද වූ ඒකාකාර සුමට AB දණ්ඩට, එහි අවල A කෙළවර වටා සුවල ලෙස හැරෙන්නට පුළුවන. බර $2W$ වූ කුඩා සුමට C මුද්දකට දණ්ඩ දිගේ සර්පණය විය හැකි ය. A ලක්ෂ්‍යය මෙන් එකම සිරස් මට්ටමේ පිහිටි D අවල ලක්ෂ්‍යයකට මුද්ද ඈඳා ඇත්තේ $\frac{a}{4}$ දිගෙන් යුත් අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගිනි.

තන්තුවත් දණ්ඩත් එකම සිරස් තලයක පිහිටයි. $AD = \frac{a}{4}$. සමතුලිතතා පිහිටීමේ දී දණ්ඩ හා මුද්ද අතර ප්‍රතික්‍රියාව සොයා දණ්ඩ සිරස සමග $\frac{\pi}{3}$ කෝණයක් සාදන බව පෙන්වන්න.
තන්තුවේ ආතතියත්, A කෙළවරේ ප්‍රතික්‍රියාවත් සොයන්න.

5. Oxy තලයේ පිහිටි $A_r \equiv (x_r, y_r)$ ලක්ෂ්‍යවල දී ක්‍රියා කරන ඒකතල බල පද්ධතියට (X_r, Y_r), $r = 1, 2, 3, \ldots, n$ සංරචක තිබෙයි. $P \equiv (x, y)$ ලක්ෂ්‍යය වටා පද්ධතියේ ඝූර්ණය $G - Yx + Xy$ බව පෙන්වන්න.

මෙහි $X = \sum_{r=1}^{n} X_r$, $Y = \sum_{r=1}^{n} Y_r$ හා $G = \sum_{r=1}^{n} (Y_r x_r - X_r y_r)$.

$X^2 + Y^2 \neq 0$ බව දී තිබෙයි නම්, පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්තයෙහි ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය අපෝහනය කරන්න.

$A \equiv (2a, 0)$ ලක්ෂ්‍යය වටා හා $B \equiv (0, a)$ ලක්ෂ්‍යය වටා පද්ධතියේ ඝූර්ණ පිළිවෙළින් H හා $2H$ වෙයි. $y = x$ රේඛාවට සමාන්තර විභින්න කොටස්වල ඓක්‍යය ශූන්‍යය යි. පද්ධතිය සඳහා X, Y හා G සොයා සම්ප්‍රයුක්තය, $x + y = 3a$ රේඛාව ඔස්සේ ක්‍රියා කරන $\frac{H}{a}(-\mathbf{i} + \mathbf{j})$ බලයක් බව පෙන්වන්න.
මෙහි $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ යනු පිළිවෙළින් Ox, Oy අක්ෂ ඔස්සේ වූ ඒකක දෛශික යි.

6. එක එකක දිග a ද බර W ද වූ AB, BC, CD යන සමාන ඒකාකාර දඬු තුනක්, දිග $2a$ ද බර $2W$ ද වූ ඒකාකාර AD දණ්ඩක් A, B, C, D ලක්ෂ්‍යවල දී සුමට ලෙස අසවු කර තිබේ. BC හි මධ්‍ය-ලක්ෂ්‍යයෙන් එල්ලූ රාමුසැකිල්ල සමතුලිතතාවේ පවතියි. A හා B සන්ධිවල දී AB දණ්ඩ මත ප්‍රතික්‍රියාවල විශාලත්ව හා දිශා සොයා ඒවායේ ක්‍රියා රේඛා BC ට පහළින් $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ ගැඹුරක දී හමුවන බව පෙන්වන්න.

7. (i) අරය a ද පෘෂ්ඨික ඝනත්වය σ ද වූ ඒකාකාර අර්ධ-ගෝලීය කබොලකත්,
(ii) උස h ද අර්ධ-සිරස් කෝණය α ද පෘෂ්ඨික ඝනත්වය $k\sigma$ ද වූ ඒකාකාර කුහර කේතුවකත් ස්කන්ධය හා ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයේ පිහිටීම අනුකලනයෙන් හෝ අන් අයුරකින් හෝ සොයන්න.

$a = h \tan \alpha$ බවත් පෘෂ්ඨ දෙක, පොදු වෘත්තයෙන් දෙපස පිහිටන පරිදි ඒවායේ වෘත්ත දාර දිගේ එකට මූට්ටු වී ඇති බවත් දී තිබේ.

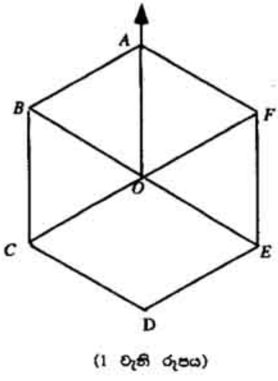
$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{36 + k^2} - k}{6}$$

නම්, අර්ධ-ගෝලීය පෘෂ්ඨයේ ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් සුමට තිරස් තලයක් සමඟ ස්පර්ශ වෙමින් සංයුක්ත වස්තුවට සමතුලිතව පිහිටිය හැකි බව පෙන්වන්න.

8. ඒකාකාර බර දණ්ඩක W බර, දණ්ඩේ අන්ත දෙකේ ඇති $\frac{W}{2}$ හා $\frac{W}{2}$ බර දෙකකට තුල්‍ය බව (දෙකකින් ප්‍රතිස්ථාපනය කළ හැකි බව) පෙන්වන්න.

$ABCDEF$ සවිධි ෂඩස්‍රය සෑදී ඇත්තේ එක සමාන බර, ඒකාකාර දඬුවලිනි. A, B, C, E, F ශීර්ෂ සහ පිළිවෙළින් OA, OB, OC, OE හා OF සැහැල්ලු දඬුවලින් O කේන්ද්‍රයට යා කර ෂඩස්‍රය A ගෙන් එල්ලා තිබේ.

බෝ අංකනය යොදා ගෙන ප්‍රත්‍යාබල රූප සටහනක් අඳින්න. ඒ නයින් සැහැල්ලු දඬුවල ප්‍රත්‍යාබල නිර්ණය කර ඒවා ආතති ද තෙරපුම් ද යන්න වර්ග කර දක්වන්න.



(1 වැනි රූපය)

9. එක එකක් $2a$ දිගින් යුත් AB, BC සමාන ලුහු දඬු දෙකක් එකිනෙකට සෘජුකෝණී වන පරිදි B හි දී දෘඪ ලෙස සන්ධි කර, a අරයෙන් යුත් අචල රළු තිරස් වෘත්ත සිලින්ඩරයක් මත තබා ඇත්තේ තිරසට සම සේ ආනතව ද ABC තලය සිලින්ඩරයේ අක්ෂයට ලම්බව ද පිහිටන පරිදි ය. W, W සමාන බර A හි දීත් C හි දීත් එල්ලා පද්ධතිය සමතුලිතව පවතියි.

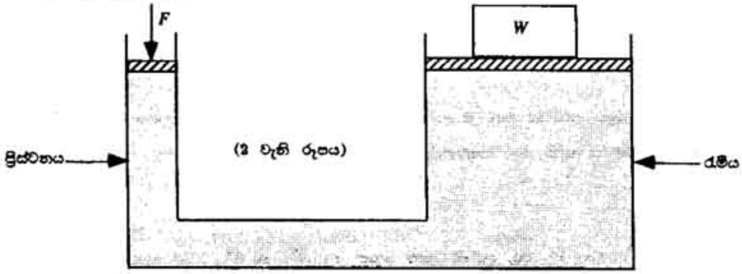
එක් එක් ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ දී අභිලම්බ ප්‍රතික්‍රියාවේ අඩුතම අගය $\frac{W\sqrt{2}}{1+\mu}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි μ යනු ඝර්ෂණ සංගුණකය යි.

සීමාකාරී සමතුලිතතාවක් පවතින පරිදි w අමතර බරක් පරෙස්සමින් A ගෙන් එල්ලුවහොත්

$$\frac{w}{W} = \frac{2\mu}{\mu^2 - \mu + 1}$$

බවත් w ට $2W$ ඉක්මවිය නොහැකි බවත් පෙන්වන්න.

10. (අ) තිරස් වර්ගයේ ද්‍රව ජැක්කුවක රැමයේ හරස්කඩ වර්ගඵලය, පිස්ටනයේ හරස්-කඩ වර්ගඵලය මෙන් n ගුණයකි. (2 වැනි රූපය) ඝර්ෂණය හේතු කොට ගෙන පිස්ටනයේ කරබදහින් රැමයේ කරබදහින් ඇති වන ප්‍රතිරෝධය පිළිවෙළින් R kg හා S kg වෙයි. F kg තිරස් බලයක් පිස්ටනයට යෙදුවොත් රැමයෙන් එසවිය හැකි W බර සොයන්න.



(2 වැනි රූපය)

(ආ) අර්ධ-ගෝලීය කබොල දෙකක් එකට මූට්ටු කිරීමෙන් ගෝලීය කුහර බඳුනක් තනා ඇත. මූට්ටුවේ තලය තිරස් ව සිටින සේ බඳුන තබා එම තිරස් තලයට ඉහළින් h උසකට එන තෙක් ρ ඝනත්වයෙන් යුත් ද්‍රවයක් බඳුනට දමනු ලැබෙයි. පහළ අර්ධ ගෝලයෙන් ඉහළ අර්ධ ගෝලය එසවීමට යත්න දරන $\frac{1}{3}\pi\rho g h^3$ බලයක් ද්‍රවයේ පීඩනයෙන් හට ගන්නා බව පෙන්වන්න.

11. අර්ධ-වෘත්තාකාර ආස්තරයක් එහි සෘජු දරය ද්‍රව-පෘෂ්ඨයේ පවතින සේ සිරස් ලෙස ද්‍රවයක ගිල්වා ඇත. ආස්තරයේ පීඩන කේන්ද්‍රය $\frac{3\pi a}{16}$ ගැඹුරක පිහිටන බව පෙන්වන්න. මෙහි a යනු ආස්තරයේ අරය යි.

වෘත්ත කඩක් සහිත තිරස් නළයක එක් කෙළවරක් වසා ඇත්තේ, නළයේ එම කෙළවරේ ඉහළ ම ලක්ෂ්‍යයට සුචල ලෙස අසවු කළ සිරස් වෘත්තාකාර දොරක් මගිනි. අනික් කෙළවර දෘඪ ලෙස වසා ඇත. ρ ඝනත්වයෙන් යුත් නිශ්චලතාවයේ ඇති ද්‍රවයකින් නළයේ බාගයක් පිරී ඇති විට, දොර වැසී තිබීම සඳහා දොරේ පහළ ම ලක්ෂ්‍යයට යෙදිය යුතු අඩුතම බලය සොයන්න.

12. ද්‍රවස්ථිතිකයේ එන ආකිමිඩීස් මූලධර්මය සඳහන් කරන්න.

ඒකාකාර ප්‍රිස්මයක හරස් කඩ, අසමාන පාද සහිත සෘජුකෝණාස්‍රයකි. සම්මුඛ දර දෙකක් පෘෂ්ඨයේ තිබෙන පරිදි ප්‍රිස්මය ජලයේ ඉපිලෙන්නේ ජලයෙන් උඩ තිබෙන දරයේ මධ්‍ය-ලක්ෂ්‍යයට ඇඳූ තන්තුවක ආධාරයෙනි. පහත සඳහන් ප්‍රතිඵල තහවුරු කරන්න.

(i) තන්තුව සිරස් ය.

(ii) ප්‍රිස්මයේ විශිෂ්ට ගුරුත්වය $\frac{2}{3}$ කි.

(iii) තන්තුවේ ආතතිය ප්‍රිස්මයේ බරෙන් හතරෙන් එකකි.

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
All Rights Reserved]

15436

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1994 අගෝස්තු
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1994

ව්‍යවහාරික ගණිතය II
Applied Mathematics II

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

අවශ්‍ය තැන්හි ගුරුත්වජ ත්වරණය, $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ ලෙස ගන්න.

1. (අ) $\frac{dy}{dx} + xy = y^3 x$ අවකල සමීකරණයේ විසඳුම $y^2 e^{x^2} = c\,(y^2 - 1)$ ආකාරයෙන් ලබා ගන්න. මෙහි c යනු නියතයකි.

(ආ) Γ තල වක්‍රයක ඕනෑ ම $P \equiv (x, y)$ ලක්ෂ්‍යයක දී අනුක්‍රමණය, P ලක්ෂ්‍යයට O මූල ලක්ෂ්‍යය යා කැරෙන රේඛාවේ බෑවුම එකකින් ඉක්මවයි. Γ වක්‍රය $(-1,\ 0)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යයි නම්,

$$e^y = |x|^x$$

බව පෙන්වන්න.

2. අංශුවක්, දුනු තරාදියක් මඟින් ආරෝහකයක (ඔසොවනක) වියනෙන් සිරස් ලෙස එල්ලා තිබෙයි. ආරෝහකයේ උඩුකුරු චලිතය අවස්ථා තුනකින් සිදුවෙයි. පළමු වැනි අවස්ථාවේ දී ආරෝහකය නිසලව සිට නියත ත්වරණයෙන් ඉහළ නගියි; එවිට දුනු තරාදි පාඨාංකය $(1 + \frac{a}{g})$ kg කි. දෙ වැනි අවස්ථාවේ දී තත්පර t_0 පුරා ආරෝහකය ඉහළ නගින්නේ $V \text{ m s}^{-1}$ නියත ප්‍රවේගයෙනි; එවිට දුනු තරාදි පාඨාංකය 1 kg කි. අවසාන අවස්ථාවේ දී නිශ්චලතාවට එන තෙක් ආරෝහකය නියත මන්දනයෙන් ඉහළ නගියි; එවිට දුනු තරාදි පාඨාංකය $(1 - \frac{a}{g})$ kg කි. මෙහි $0 < a \leq g$. එම ගමනේ දී ආරෝහකය ඉහළ නැගි මුළු දුර මීටර h ද ගත්තා ලද මුළු කාලය තත්පර T ද නම්, එක් එක් අවස්ථාවේ දී ආරෝහකයේ ත්වරණය සොයන්න.

(i) ආරෝහකයේ චලිතය සඳහා ත්වරණ-කාල වක්‍රය ඇඳ

$$t_0 = T - \frac{2V}{a}$$

බව අපෝහනය කරන්න.

(ii) ආරෝහකයේ චලිතය සඳහා ප්‍රවේග-කාල වක්‍රය ඇඳ, ඒ නයින්,

$$V^2 - aTV + ah = 0.$$

බව පෙන්වන්න.

$$T \geq 2\sqrt{\frac{h}{g}}$$

බව අපෝහනය කරන්න.

3. OPQ සරල රේඛාවක් ඔස්සේ V වේගයෙන් චලනය වන අංශුවක් t වේලාවේ දී ඒකක ස්කන්ධයට kV^{n+2} $(n > 0)$ ප්‍රතිරෝධයකට භාජනය වෙයි. මෙහි k යනු ධන නියතයක් වන අතර අංශුව මත වෙනත් බල ක්‍රියා නොකරයි. ආරම්භයේ දී, අංශුව Oහි සිට u වේගයෙන් ගමන් අරඹයි. t කාලයකට පසු O සිට අංශුවට දුර x ය.

(i) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{u}{(1 + knxu^n)^{\frac{1}{n}}}$ බවත්

(ii) $(1 + knx\,u^n)^{\frac{1}{n}} = \left[1 + k(n+1)t\,u^{n+1}\right]^{\frac{1}{n+1}}$ බවත්

සාධනය කරන්න.

අංශුව, P සිට Q තෙක් ගමන් කරන විට එහි වේගය W සිට αW $(\alpha > o)$ තෙක් අඩු වෙයි නම්, P සිට Q තෙක් ගමන පුරා අංශුවේ මධ්‍යක වේගය

$$\alpha W \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(\frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha^{n+1}}\right)$$

බව පෙන්වන්න.

4. (අ) v km h^{-1} කින් යාත්‍රා කරන P බෝට්ටුවක් A වරායෙන් පිටත් වන්නේ, A ට d cosec α km නැගෙනහිරින් වූ B වරායෙන් පිටත් වන Q බෝට්ටුවේ සිට d km ක පරාසයක් තුළට පිවිසෙන පරිද්දෙනි. Q බෝට්ටුව $u (< v)$ km h^{-1} කින් දකුණු දෙසට යාත්‍රා කරයි. පරාසය තුළට පිවිසීම සඳහා P බෝට්ටුව ගමන් කළ යුතු අන්ත දිශා දෙක අතර කෝණය 2α බව පෙන්වන්න.

(ආ) A හා B යනු $|\overrightarrow{AB}| = a$ වන පරිදි තලයක චලනය වන අංශු දෙකකි. මෙහි a යනු නියතයකි. ඕනෑම මොහොතක දී A ගේත් B ගේත් ප්‍රවේග පිළිවෙළින් $\overrightarrow{AB}$ සමඟ වාමාවර්ත අතට $\frac{\pi}{6}$ හා $\frac{\pi}{3}$ කෝණ සාදන දිශාවලට වෙයි. AB රේඛාවේ කෝණික වේගය $\frac{u}{a}$ නම් ඕනෑ ම මොහොතක දී A හා B අංශු දෙකේ වේග සොයන්න.

5. 60 km h^{-1} ක ඒකාකාර ප්‍රවේගයකින් සිරස් ලෙස චලනය වන ට්‍රක් රථයකින් ට්‍රේලරයක් ඇද ගෙන යයි. ට්‍රේලරයේ රළු සෘජුකෝණාස්‍ර පතුල මත කුඩා භාරයක් නිශ්චලව තබා ඇත්තේ ට්‍රේලරයේ ඉදිරිපස දාරයට මීටර 9 ක් දුරිනි. $t = 0$ වේලාවේ දී ආරම්භ කර ට්‍රක් රථයට ඒකාකාර මන්දනයක් දෙනු ලබන්නේ මීටර d දුරක දී ට්‍රක් රථය නවතින පරිද්දෙනි. භාරය, ට්‍රේලරයට සාපේක්ෂව චලනය වීමට පටන් ගනියි නම්,

$$\mu < \frac{125}{9d}$$

බව පෙන්වන්න. මෙහි μ යනු භාරයත් ට්‍රේලරයේ පතුලත් අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය යි.

$d = 25$ ද $\mu = 0.4$ ද නම් භාරය තත්පර $\dfrac{25 - \sqrt{13}}{6}$ ක කාලයක දී $\dfrac{2\sqrt{13}}{3}$ m s^{-1} ප්‍රවේගයෙන් ට්‍රේලරයේ ඉදිරිපස දාරය වෙත ළඟා වන බව පෙන්වන්න.

6. V ප්‍රවේගයෙන් ගමන් කරන m ස්කන්ධයෙන් යුත් අංශුවක්, චලිතයට ප්‍රතිවිරුද්ධ දිශාවට වූ විචල්‍ය බලයෙකින් නිශ්චලතාවට ගෙන එමේ දී කැරෙන කාර්යය $\frac{1}{2} mV^2$ බව පෙන්වන්න.

$t = 0$ වේලාවේ දී නිශ්චලතාවෙන් ආරම්භ කරන g බරින් යුත් සෙල්ලම් රථයක් සුමට තිරස් තලයක ගමන් කරයි. t වේලාවේ දී රථය මත F ප්‍රකර්ෂණ බලය,

$$F = (10 + 19x - 2x^2)\,g$$

යන්නෙන් ලැබෙයි. මෙහි x යනු t කාලයේ දී රථය ගමන් කළ දුර ද $0 \leq x \leq 12$ ද වෙයි.

(i) $0 \leq x \leq \frac{19}{4}$ වන විට දී පමණක් රථය මත F ප්‍රකර්ෂණ බලය වැඩි වන බව පෙන්වන්න.

(ii) $0 \leq x \leq 12$ විට බල-දුර වක්‍රය ඇඳ, ඒ තයින් හෝ අන් ආකාරයකින් හෝ රථයේ උපරිම වේගය

$$10\sqrt{\frac{23g}{3}}$$

බව පෙන්වන්න.

(iii) සෙල්ලම් රථයේ වේගය උපරිම විට එහි එනිම ක්‍රියා කරන ජවය සොයන්න.

7. පොළොවෙන් ඉහළ h උසක නිසලව ඇති m ස්කන්ධයෙන් යුත් අංශුවක් සතු ශක්තිය සොයන්න.

නොගිණිය හැකි උසකින් යුත් 20 kg බර ළමයෙක්, තිරසට රේඩියන් $\frac{\pi}{3}$ ක ආනතියක් සහිත ඍජු පොල් ගසක මුදුනට ගැනීමේ දී ගුරුත්වයට එරෙහිව කැරෙන කාර්යය $2\sqrt{3}$ kJ ය. පොල් ගසේ උස සොයන්න.

ගස මුදුනේ සිටින ළමයා පොල් ගෙඩියක් කඩා එහි සිට $V\,\text{ms}^{-1}$ වේගයෙන් තිරස සමඟ α ආරෝහණ කෝණයකින් ගෙඩිය විසිකරන්නේ එය පොල් ගස මුලට වැටෙන පරිදි ය.

$$\cos\alpha\,\sin(\alpha+60) = \frac{25}{V^2}$$

බව පෙන්වා

$$V \geq 10\left(2-\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

බව අපෝහනය කරන්න.

8. u ප්‍රවේගයෙකින් චලනය වන සුමට බෝලයක්, අචල සුමට තලයක් සමඟ θ කෝණයක් සාදන දිශාවක් ඔස්සේ තලයේ ගැටී, පිටි අතට අභිලම්බය සමඟ ϕ කෝණයක් සාදමින් V ප්‍රවේගයෙන් පොළා පනියි.

$$\cot\theta\,\cot\phi = e$$

බව පෙන්වන්න. මෙහි e යනු බෝලයත් තලයත් අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය යි.

A, B, C, D යනු සුමට, සිරස්, පසුම්බි රහිත සෘජුකෝණාස්‍රාකාර බිලියඩ් මේසයක කොන් හතරයි. එම මේසයේ දාර හතර සුමට සිරස් ගැටිවලින් වටකොට ඇත. සුමට බිලියඩ් බෝලයක් $t=0$ වේලාවේ දී AB හි P මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයේ සිට $\overrightarrow{AB}$ සමඟ α කෝණයක් සාදන දිශාවකට මේසයේ පෘෂ්ඨය දිගේ u ප්‍රවේගයෙන් ප්‍රක්ෂේපණය කරනු ලබන්නේ, පිළිවෙළින් Q, R, S ලක්ෂ්‍යවල දී BC, CD, DA ගැටිවල වැදෙන පරිදි ය. බෝලයත් ගැටිත් අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $e\,(>0)$ වෙයි. Q, R, S ලක්ෂ්‍යවල දී පළමු ගැටුම්වලින් පසු T කාලයක දී බෝලය නම P ආරම්භක ලක්ෂ්‍යය වෙත නැවත පැමිණෙයි නම්,

(i) $PQRS$ සමාන්තරාස්‍රයක් බවත්

(ii) $T = \frac{a}{2u}(\sec\alpha)\left(1+e^{-1}\right)^2$ බවත්

සාධනය කරන්න. මෙහි $a = \left|\overrightarrow{AB}\right|$.

9. AB ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවේ ස්වාභාවික දිග l ය. එහි A ඉහළ කෙළවර සිලිමකට ඇදා තන්තුව සිරස්ව තබා ඇත. තන්තුවේ B පහළ කෙළවරින් බර අංශුවක් ගැට ගසා තන්තුව නිශ්චලතාවයේ එල්ලෙන විට e විතතියක් ඇති වෙයි. අංශුව සමතුලිතතා පිහිටීමෙන් තවත් $d\,(>e)$ දුරක් පහළට ඇද නිශ්චලතාවේ සිට මුදා හැරිය හොත් අංශුවේ චලිතයෙන් කොටසක් $\sqrt{\frac{g}{e}}$ කෝණික සංඛ්‍යාතය සහිත සරල අනුවර්තී චලිතයක් බව පෙන්වන්න.

අංශුව සිලිමේ වදින්නේ නැතිනම්

$$l > \left(\frac{d^2-e^2}{2e}\right)$$

බව සාධනය කර

$$2\sqrt{\frac{e}{g}}\left\{\pi + \frac{\sqrt{d^2-e^2}}{e} - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{d^2-e^2}}{e}\right)\right\}$$

මුළු කාලයකට පසු අංශුව යළිත් ආරම්භක ලක්ෂ්‍යයට පැමිණෙන බව ද සාධනය කරන්න.

10. **I** ආවේගයක් මගින් අංශුවක ප්‍රවේගය **u** සිට **v** තෙක් වෙනස් කරයි නම් අංශුවේ ΔE චාලක ශක්ති වෙනස්වීම,

$$\Delta E = \frac{1}{2}\,\mathbf{I}\,.\,(\mathbf{u} + \mathbf{v})$$

යන්නෙන් දෙනු ලබන බව සාධනය කරන්න.

එක එකක ස්කන්ධය m වන A, B, C, D සමාන අංශු හතරක් AB, BC, CD සමාන අවිතන්‍ය යුහු තන්තු තුනකින් සම්බන්ධ කර සුමට තිරස් මේසයක් මත නිසලව ඇත්තේ තන්තු නොබුරුල්ව ද AB, BC, CD සවිධි ෂඩස්‍රයක පාද තුනක් ද වන පරිදි ය. මේසය දිගේ $\overrightarrow{BA}$ දිශාවට I විශාලත්වයෙන් යුත් ආවේගයක් A අංශුවට ලැබෙයි. D අංශුවේ ආරම්භක වේගය $\frac{I}{28\,m}$ බව පෙන්වන්න.

පද්ධතියට ලැබෙන චාලක ශක්තිය m හා I ඇසුරෙන් සොයන්න.

11. P අංශුවක් Oxy තලයේ පිහිටි අරය a ද කේන්ද්‍රය O ද වූ වෘත්තයක චලනය වෙයි. P ගේ ත්වරණයේ අරීය සංරචකයත් තිර්යක් සංරචකයත් පිළිවෙළින් $-a\dot{\theta}^2$ හා $a\ddot{\theta}$ වන බව පෙන්වන්න. මෙහි θ යනු OP ත් x-අක්ෂයත් අතර කෝණයයි.

a අරයෙන් හා O කේන්ද්‍රයෙන් යුත් සුමට අර්ධ ගෝලයක් එහි පතුල තිරස් තලයක පිහිටන සේ සවි කර තිබෙයි. m ස්කන්ධයෙන් යුත් P නම් බර අංශුවක් අර්ධගෝලයේ ඉහළ ම ලක්ෂ්‍යයේ නිසලව තිබී මඳක් විස්ථාපනය කළ පසු, අර්ධගෝලයේ වක්‍ර පෘෂ්ඨය මත සර්පණය වෙයි. OP අරය ඌර්ධ්ව සිරස සමග $\theta\left(< \frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයක් සාදන විට

(i) P ගේ ප්‍රවේගයත්
(ii) P මත ප්‍රතික්‍රියාවත්

සොයන්න.

අංශුව අර්ධගෝලයේ පෘෂ්ඨයෙන් ඉවත්ව යන විට Pගේ ප්‍රවේගයේ තිරස් සංරචකයත් සිරස් සංරචකයත් පිළිවෙළින් $\frac{\sqrt{24\,ag}}{9}$ ද $\frac{\sqrt{30\,ag}}{9}$ ද බව පෙන්වන්න.

12. ස්කන්ධය m ද අරය a ද වන ඒකාකාර වෘත්ත තැටියක, එහි තලයට ලම්බ තැටියේ කේන්ද්‍රය හරහා යන අක්ෂයක් වටා අවස්ථිති ඝූර්ණය $\frac{1}{2}\,ma^2$ බව පෙන්වන්න.

m ස්කන්ධයෙන් ද a අරයෙන් ද යුත් ඒකාකාර වෘත්ත තැටියකට, එහි C කේන්ද්‍රය හරහා යන අචල සුමට තිරස් අක්ෂයක් වටා භ්‍රමණය වීමට නිදහස තිබෙයි. P නම් කෘමියෙක් තැටියේ පහළ ම ලක්ෂ්‍යයේ සිටියි; මුළු පද්ධතිය ම නිසලව ඇත. කෘමියා හදිසියේ ම, තැටියට සාපේක්ෂව V ඒකාකාර වේගයෙන් තැටියේ ගැට්ය දිගේ ගමන් කිරීම අරඹයි. තැටියේ ආරම්භක කෝණික වේගය $\frac{V}{11a}$ නම් කෘමියාගේ ස්කන්ධය සොයන්න.

ඉන් පසුව ඇති වන චලිතයේ දී $\overrightarrow{CP}$ ත් යටිඅත් සිරසත් අතර කෝණය θ නම්,

$$121\,a^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + 22\,ag - 22\,ag\,\cos\theta = 100\,V^2$$

බව සාධනය කරන්න.